

Stochastik

Zufallsvariable und Verteilungen



Mit der Kombinatorik stehen Modelle zur Verfügung, mit denen Wahrscheinlichkeiten von Laplace Experimenten (alle Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit) ermittelt werden können. Es gibt im wesentlichen 4 Grundsituationen:

	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

Beispiele

- Auf wie viele Arten kann man 7 Touristen in 10 Einzelzimmern unterbringen?
- Wie viele verschiedene Aminosäuren könnte die DNS verschlüsseln? (4 Buchstaben, Wortlänge 3)
- Bei einer Fußball-WM nehmen 32 Nationen teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Teilnehmer, auf den ersten 4 Plätzen zu landen?
- Auf wie viele Arten kann man beim Lotto einen Tipp ausfüllen?
- In einer Urne liegen 4 nummerierte Kugeln. Auf wie viele Arten kann ich 3 Kugeln auswählen, wenn ich nach jeder Wahl die gewählte Kugel zurücklege?

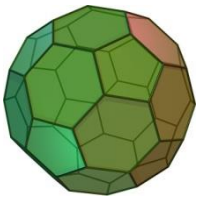
$$\frac{10!}{(10-7)!} = 604\,800$$

$$4^3 = 64$$

$$\frac{32!}{(32-4)!} = 863\,040$$

$$\frac{49!}{(49-6)!6!} = 13\,983\,816$$

$$\binom{4+3-1}{3} = 20$$



Stochastik

Zufallsvariable und Verteilungen



Experiment: Ein blauer und ein grüner Würfel werden 400 mal geworfen

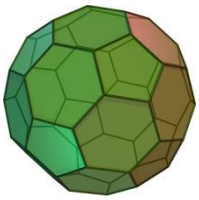
Ergebnisraum: $\Omega = \{(i,j) \mid 0 < i,j < 7 \text{ und } i,j \in \mathbb{N}\}$

		blauer Würfel					
grüner Würfel		15	9	12	13	12	11
		5	8	11	11	9	15
		10	9	14	10	10	17
		12	7	9	7	17	15
		10	14	7	13	9	14
		5	12	15	14	11	8

Augen summe	zugehöriges Ergebnis	abs. H	rel. h	P(X)
2	(1 1)	15	0,0375	$\frac{1}{36} \approx 0,028$
3	(1 2);(2 1)	14	0,035	$\frac{2}{36} \approx 0,056$
4	(1 3);(2 2);(3 1)	30	0,075	$\frac{3}{36} \approx 0,083$
5	(1 4);(2 3);(3 2);(4 1)	45	0,1125	$\frac{4}{36} \approx 0,111$
6	(1 5);(2 4);(3 3);(4 2);(5 1)	54	0,135	$\frac{5}{36} \approx 0,139$
7	(1 6);(2 5);(3 4);(4 3);(5 2);(6 1)	58	0,145	$\frac{6}{36} \approx 0,167$
8	(2 6);(3 5);(4 4);(5 3);(6 2)	51	0,1275	$\frac{5}{36} \approx 0,139$
9	(3 6);(4 5);(5 4);(6 3)	62	0,155	$\frac{4}{36} \approx 0,111$
10	(4 6);(5 5);(6 4)	38	0,095	$\frac{3}{36} \approx 0,083$
11	(5 6);(6 5)	25	0,0625	$\frac{2}{36} \approx 0,056$
12	(6 6)	8	0,02	$\frac{1}{36} \approx 0,028$

Definition: Eine Zufallsvariable eines Experimentes ist eine Funktion, die jedem Ergebnis eine Zahl zuordnet.

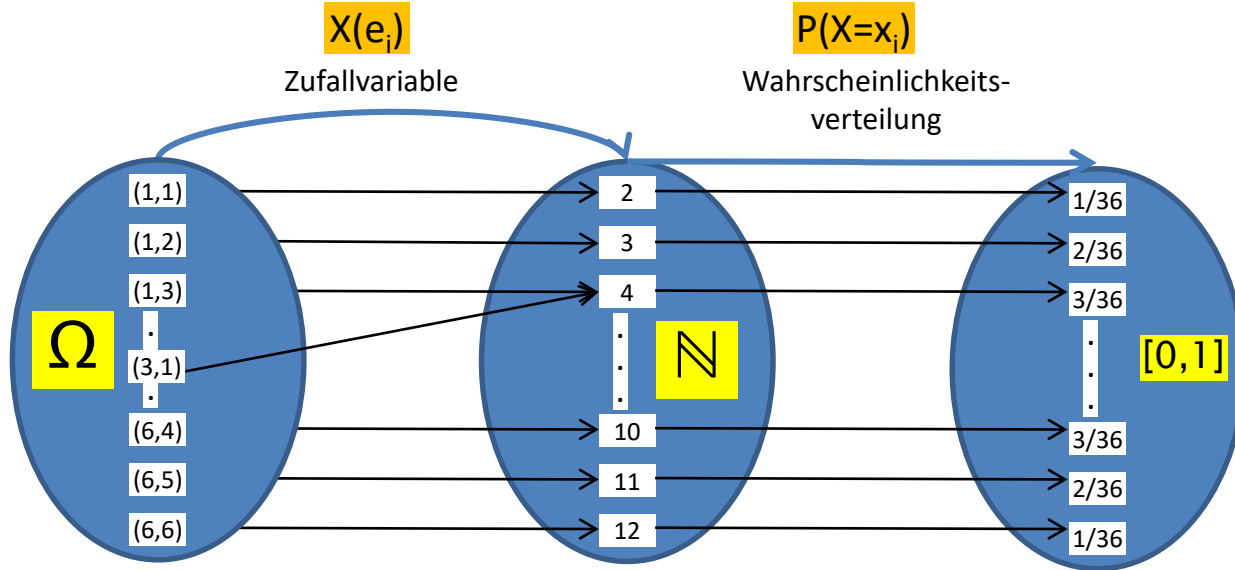
Beispiel von oben: $X: \Omega \mapsto \mathbb{N}$ mit $X((i,j)) = i+j$



Stochastik

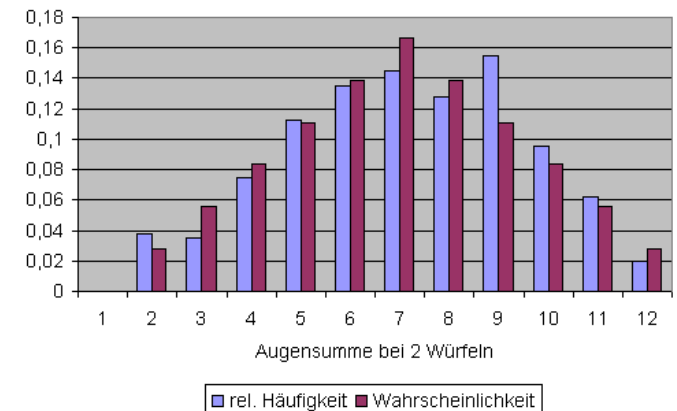
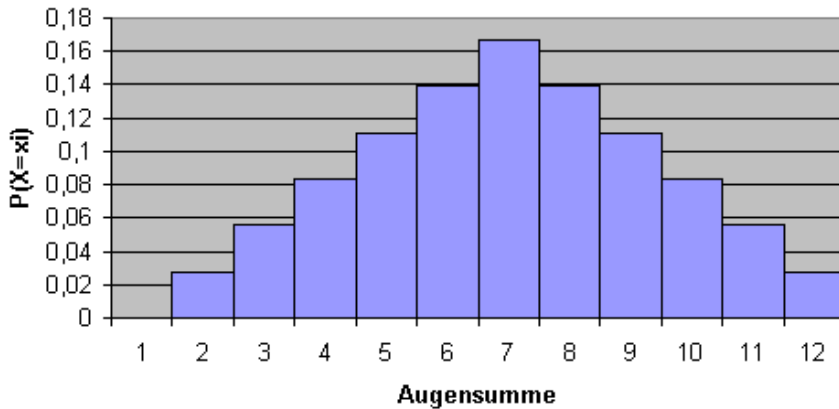
Zufallsvariable und Verteilungen

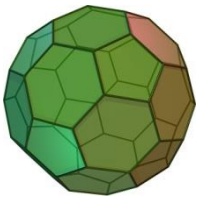
Würfeln mit 2 Würfeln



Vergleich

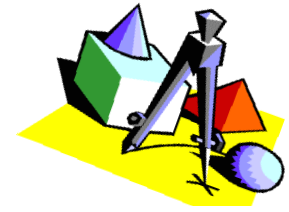
Wahrscheinlichkeit vs relative Häufigkeit





Stochastik

Zufallsvariable und Verteilungen



Motivation: Binomialverteilung

Definition:

Ein Experiment, in dem es nur 2 mögliche Ergebnisse gibt, heißt ein Bernoulliexperiment.

Definition:

Ein Bernoulliexperiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit p , das n Mal ausgeführt wird, heißt eine Bernoullikette mit den Parametern n, p

Beispiel:

Mit einem Würfel wird 4 Mal gewürfelt. Als Treffer gilt, wenn eine 6 gewürfelt wurde.

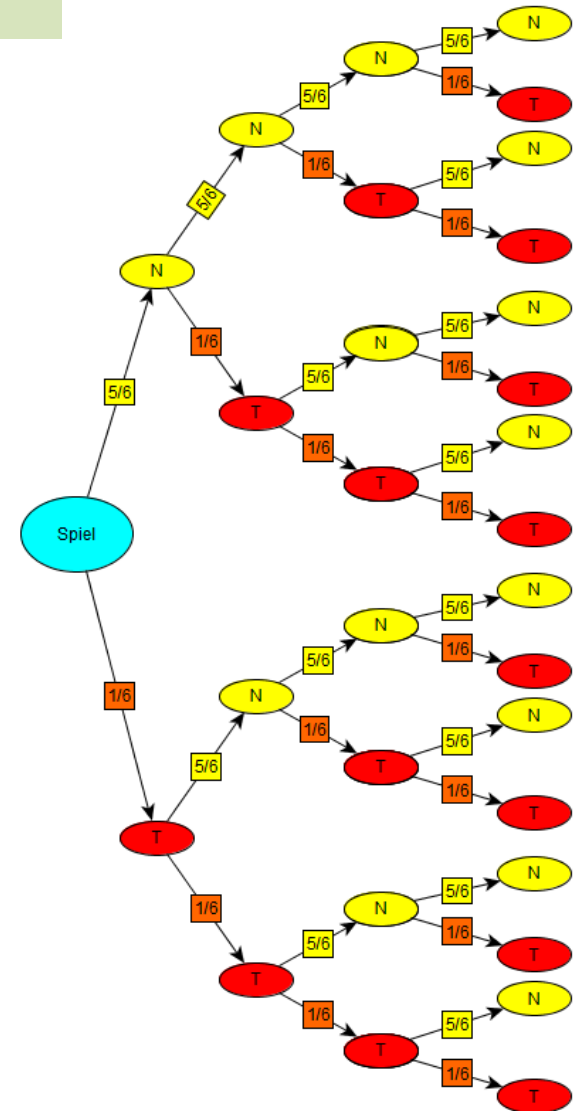
Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 3 Mal eine 6 gewürfelt wurde?

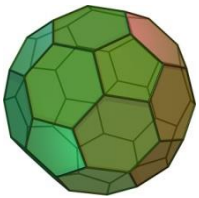
Antwort: (mit Pfadregeln)

Alle Einzelwahrscheinlichkeiten der Pfade, auf denen 3 Mal Treffer und ein Mal Niete liegt, werden addiert also hier:

$$4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{324}$$

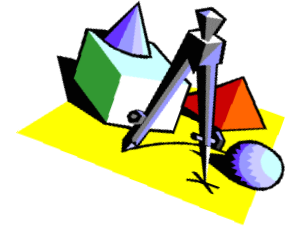
Ditmar Bachmann / Eurokolleg





Stochastik

Zufallsvariable und Verteilungen



Definition: Eine Zufallsvariable heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p , (Schreibweise: $B(n | p)$), wenn sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k) = B(k | n, p) = B(n; p; k) = B_{n;p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n - k}$ besitzt.

Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von einer Folge von gleichen Experimenten, wobei die Experimente nur jeweils 2 mögliche Ergebnisse haben können (Erfolg, Misserfolg oder Treffer, Nichttreffer)

Beispiel: Zufallsvariable mit den Parametern 10 und 0,3: $B(10 | 0,3)$

