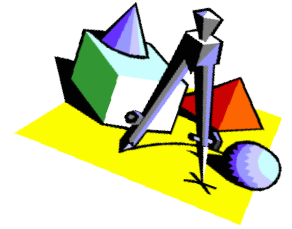


Aufgabenblatt 11 / Klasse 12



Produkt- und Kettenregel, e-Funktion und Logarithmus

Aufgabe 1

Bilde die 1. und 2. Ableitung und vereinfache soweit wie möglich:

a) $f_1(x) = e^x + x^2$

b) $f_2(x) = e^{-x} + e^x$

c) $f_3(x) = 2ex - 3e^x$

d) $f_4(x) = (3x - 4)e^x$

e) $f_5(t) = \frac{e^t - 3}{e^t}$

Aufgabe 2

Vereinfache die folgenden Terme :

a) $\log_a x - 2\log_a y + \log_a z$

b) $\log_a (ab) + \log_a (a^3b)$

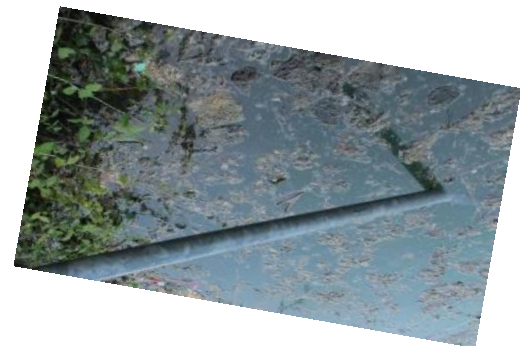
c) Berechne den folgenden Term: $2 \cdot 3^{2x-1} = 13$

Aufgabe 3

Ein Badesee ist so verunreinigt worden, dass ein Badeverbot erlassen werden musste. Die Messergebnisse ergeben eine Verunreinigung von 175 ppm (parts per million) durch einen giftigen Stoff. Die Verunreinigung nimmt wöchentlich um 8% ab.

Nach wie vielen Wochen kann das Badeverbot aufgehoben werden?

(Die Verunreinigung muss unter 10 ppm liegen)



Aufgabe 4

Eine Bakterienkultur von anfangs 2800 Bakterien vermehrt bei optimalen Wachstumsbedingungen innerhalb eines Tages auf 716800. Stelle das entsprechende Wachstumsgesetz (also die Funktionsgleichung) auf, wobei $B(x)$ die Bakterienanzahl nach x Stunden ist.

Aufgabe 5

Skizziere die folgenden Funktionen (siehe Rückseite)

a) $f(x) = 2^x + 1$

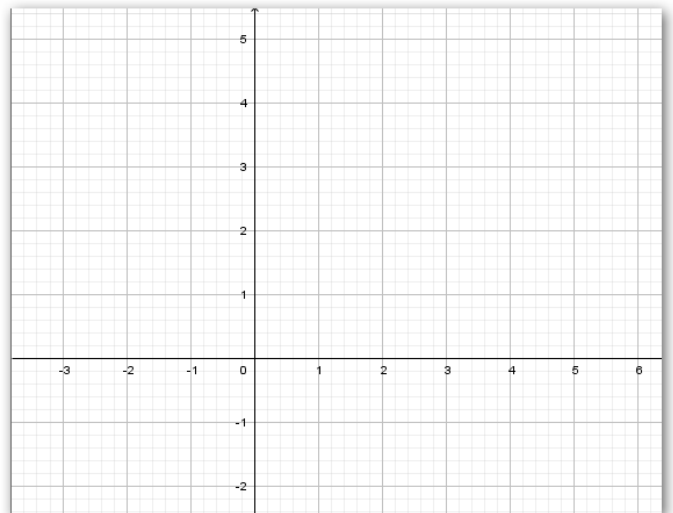
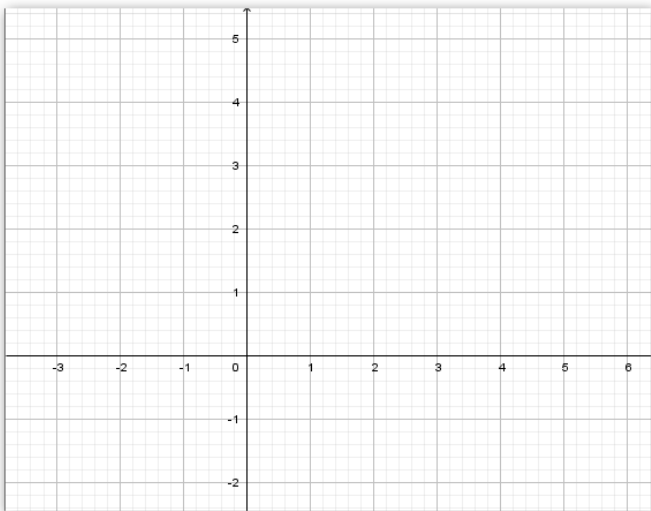
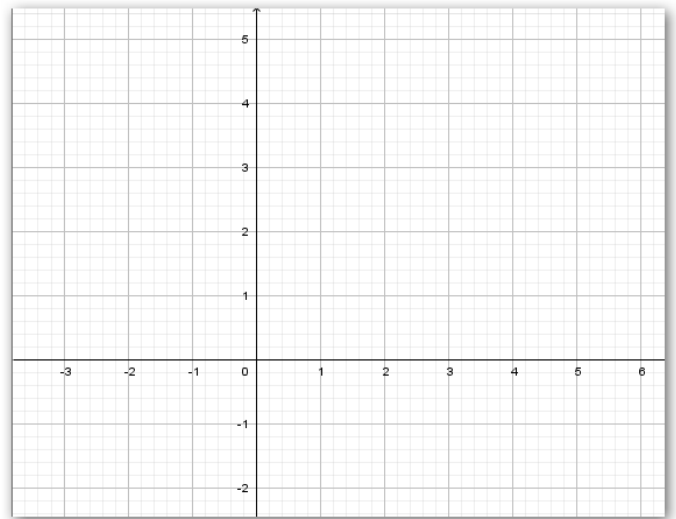
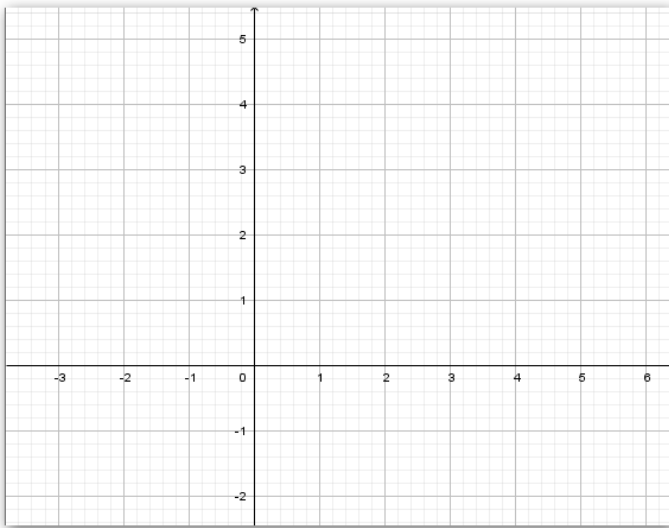
b) $g(x) = -2^x$

c) $h(x) = -2^{-x}$

d) $s(x) = 3 - 2^{-x}$

Aufgabenblatt 11 / Klasse 12

zu Aufgabe 5)



Aufgabenblatt 11 / Klasse 12

Lösungen

Aufgabe 1

- a) $f_1'(x) = e^x + 2x$
 $f_1''(x) = e^x + 2$
- b) $f_2'(x) = -e^{-x} + e^x$
 $f_2''(x) = e^{-x} + e^x$
- c) $f_3'(x) = 2e - 3e^x$
 $f_3(x) = -3e^x$
- d) $f_4'(x) = (3x - 1)e^x$
 $f_4''(x) = (3x + 2)e^x$
- e) $f_5'(t) = e^t \cdot e^{-t} + (e^t - 3)(-1) e^{-t} = 1 + (1 - 3e^{-t})(-1) = 3e^{-t} = \frac{3}{e^t}$

Aufgabe 2

a) $\log_a x - 2\log_a y + \log_a z = \log_a x^{-1} - \log_a y^2 + \log_a z = \log_a \left(\frac{x^{-1}}{y^2}\right) + \log_a z = \log_a \left(\frac{z}{xy^2}\right)$

b) $\log_a (ab) + \log_a (a^3b) = \log_a (a^4 b^2) = \log_a (a^4) + \log_a (b^2) = 4 + \log_a (b^2)$

c) $2 \cdot 3^{2x-1} = 13 \quad \Leftrightarrow$
 $3^{2x-1} = \frac{13}{2} \quad \Leftrightarrow$
 $\log(3^{2x-1}) = \log\left(\frac{13}{2}\right) \quad \Leftrightarrow$
 $(2x - 1)\log 3 = \log\left(\frac{13}{2}\right) \quad \Leftrightarrow$
 $2x - 1 = \frac{\log\left(\frac{13}{2}\right)}{\log 3} \quad \Leftrightarrow$
 $2x = \frac{\log\left(\frac{13}{2}\right)}{\log 3} + 1 \quad \Leftrightarrow$
 $x = \frac{1}{2} \left(\frac{\log\left(\frac{13}{2}\right)}{\log 3} + 1 \right) \quad \Leftrightarrow$

$x \approx 1,352$

Aufgabe 3

$W_0 = 175$ ppm (Anfangswert)

$W_n = 10$ ppm (Endwert)

$p = 0,08$ (Prozent)

$q = 1 - 0,08 = 0,92$ (Zerfallsrate)

n ist unbekannt (Anzahl Zeitschritte)

$W_n = W_0 \cdot q^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{W_n}{W_0} = q^n \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{W_n}{W_0}\right) = \log(q^n) \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{W_n}{W_0}\right) = n \log q,$

Damit $n = \frac{\log 10 - \log 175}{\log 0,92} \approx 34,32.$

Das Badeverbot kann nach 35 Wochen aufgehoben werden.

Aufgabenblatt 11 / Klasse 12

Aufgabe 4

$W_0 = 2800$ (Anfangswert)

$W_n = 716800$ (Endwert)

$q =$ unbekannt (Wachstumsrate)

$n = 24$ (Anzahl Zeitschritte)

$$W_n = W_0 \cdot q^n \Leftrightarrow \frac{W_n}{W_0} = q^n \Leftrightarrow \sqrt[24]{\frac{W_n}{W_0}} = q, \text{ also } q = \sqrt[24]{\frac{716800}{2800}} \approx 1,25992$$

Das Wachstumsgesetz lautet: $B(x) = 2800 \cdot 1,25992^x$.

In Worten: nach x Stunden ist die Bakterienanzahl $B(x)$.

Aufgabe 5

