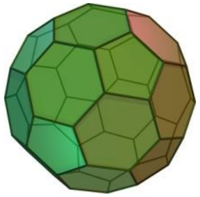
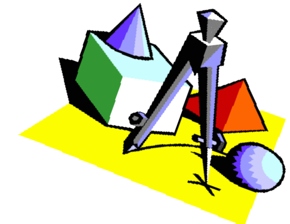


Exponential – und Logarithmusfunktion

Mathematik Klasse 12

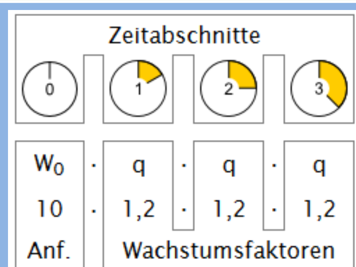


Wachstum und Zerfall

Erklärung

exponentielles Wachstum (Zerfall): eine Anfangsgröße W_0 vervielfacht (verringert) sich in gleichen Zeitabschnitten mit einem gleichbleibenden **Wachstumsfaktor** q, der größer (kleiner) ist als 1.

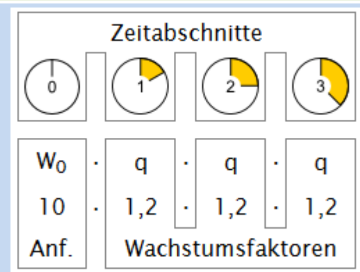
Beispiel Wachstum:



allgemein: $W_0 \cdot q^3 = W_3$ mit $q > 1$

im Beispiel: $10 \cdot 1{,}2^3 = 17{,}28$

Beispiel Zerfall:



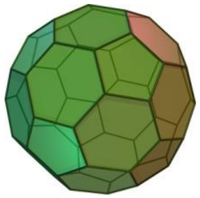
allgemein: $W_0 \cdot q^3 = W_3$ mit $0 < q < 1$

im Beispiel: $10 \cdot 0{,}8^3 = 5{,}12$

Diese Beispiele führen zu Funktionen, in denen die Variable im Exponenten vorkommt:

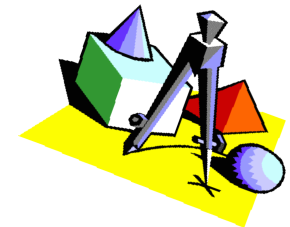
Die allgemeine Wachstumsgleichung: $w(t) = W_0 \cdot b^t$ mit
W_0 ist Anfangsmenge
t ist die Zeit
W(t) ist die Menge nach der Zeit t
$b > 1$ ist die Wachstumsrate

Die allgemeine Zerfallsgleichung: $z(t) = Z_0 \cdot (b)^t$ mit
Z_0 ist Anfangsmenge
t ist die Zeit
z(t) ist die Menge nach der Zeit t
$b < 1$ ist die Zerfallsrate



Exponential – und Logarithmusfunktion

Mathematik Klasse 12



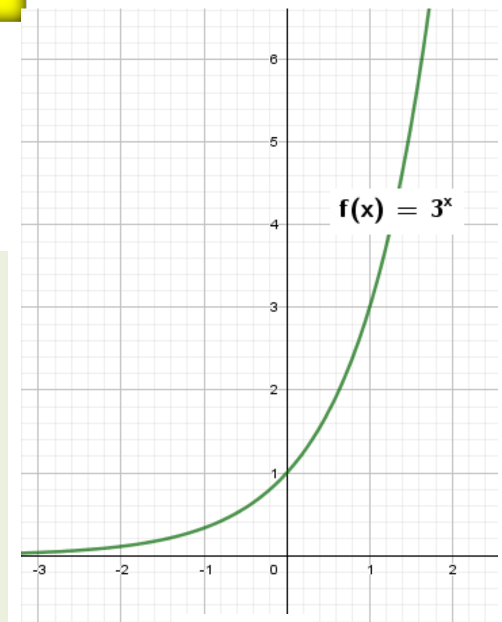
Definition der Exponentialfunktion:

$f(x) = b^x$ heißt Exponentialfunktion zur Basis b mit $b > 0$ und $b \neq 1$

Eigenschaften einer Exponentialfunktion $f(x) = b^x$:

$\mathrm{Def}_f = \mathbb{R}$ und $\mathrm{Wert}_f = \mathbb{R}_+$

- für $b > 1$ ist f streng monoton steigend
- Graph von $f(x) = b^x$ ist y-achsensymmetrisch zum Graph von $g(x) = b^{-x}$
- Graph von $f(x) = b^x$ ist x-achsensymmetrisch zum Graph von $g(x) = (-1) \cdot b^{-x}$
- Asymptote ist die x-Achse



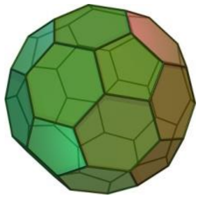
Beispiel

Parameter in der Exponentialfunktion:

Durch den Einbau von Parametern kann man den Graphen modellieren:

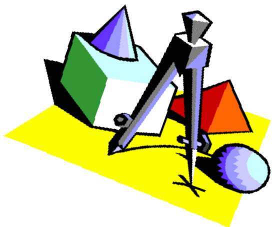
$f(x) = a \cdot b^{c(x+d)} + y_v$ mit Basis $b > 0$ und $b \neq 1$

Probiere die Wirkung der Parameter a, b, c, d und y_v mit Geogebra aus



Exponential – und Logarithmusfunktion

Mathematik Klasse 12



Definition der Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$ heißt **<u>die</u>** Exponentialfunktion mit e = 2,71828 …

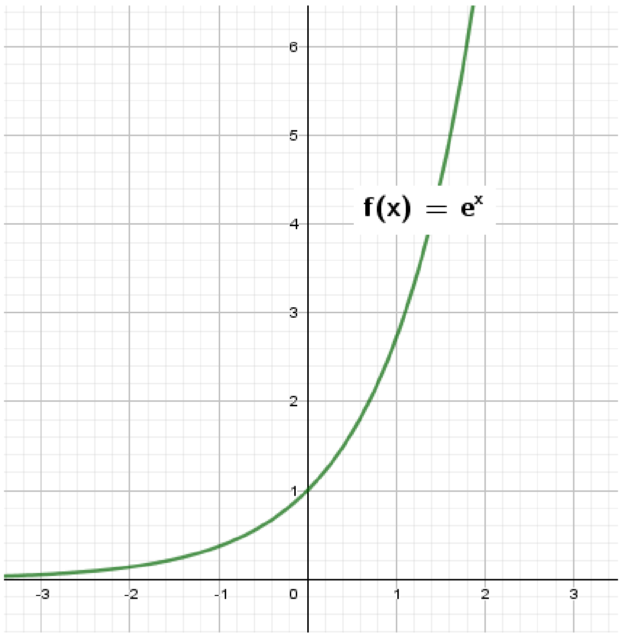
Schreibweise: exp(x)

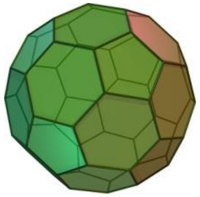
e heißt Eulersche Zahl (nach dem Entdecker dieser Zahl)

Eigenschaften einer Exponentialfunktion $f(x) = e^x$:

e^x hat alle Eigenschaften der allgemeinen Exponentialfunktion b^x. Zusätzlich gibt es die folgende bemerkenswerte Eigenschaft für die Funktion $f(x) = e^x$:

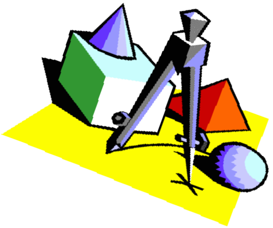
- $f(x) = f'(x)$, die e-Funktion und ihre Ableitung sind gleich.
- $\exp(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!}$





Exponential – und Logarithmusfunktion

Mathematik Klasse 12



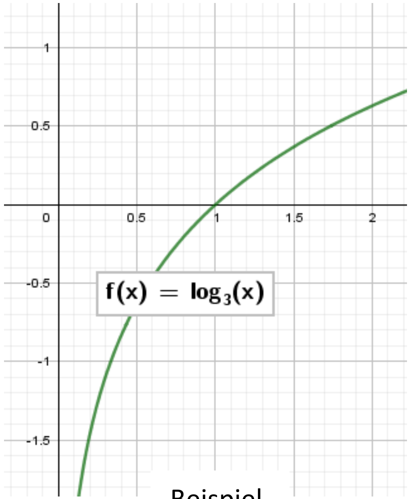
Definition der Logarithmusfunktion :

$b^x = a \Leftrightarrow \log_b(a) = x$,

$f(x) = \log_b(x)$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis b mit $b > 1$

Bemerkung: Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion:

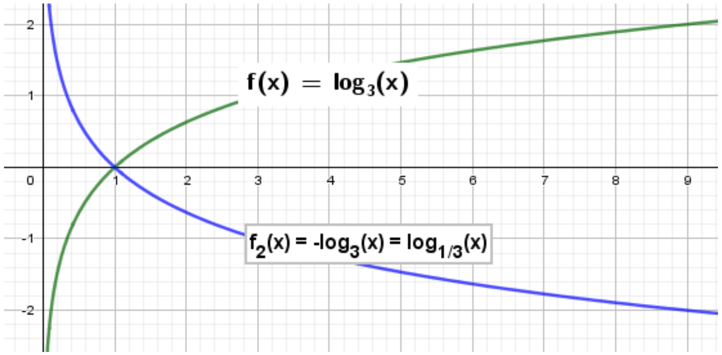
Exponentialfunktion: $y=a^x$ Logarithmusfunktion: $x = a^y$



Beispiel

Eigenschaften einer Logarithmusfunktion $f(x) = \log_b(x)$:

- Der Logarithmus ist nur für $b > 1$ definiert
- $Def_f = \mathbb{R}+$ und $Wert_f = \mathbb{R}$
- Der Logarithmus ist f streng monoton steigend
- Asymptote ist die y-Achse

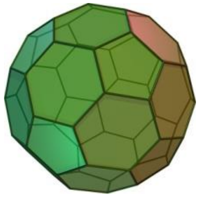


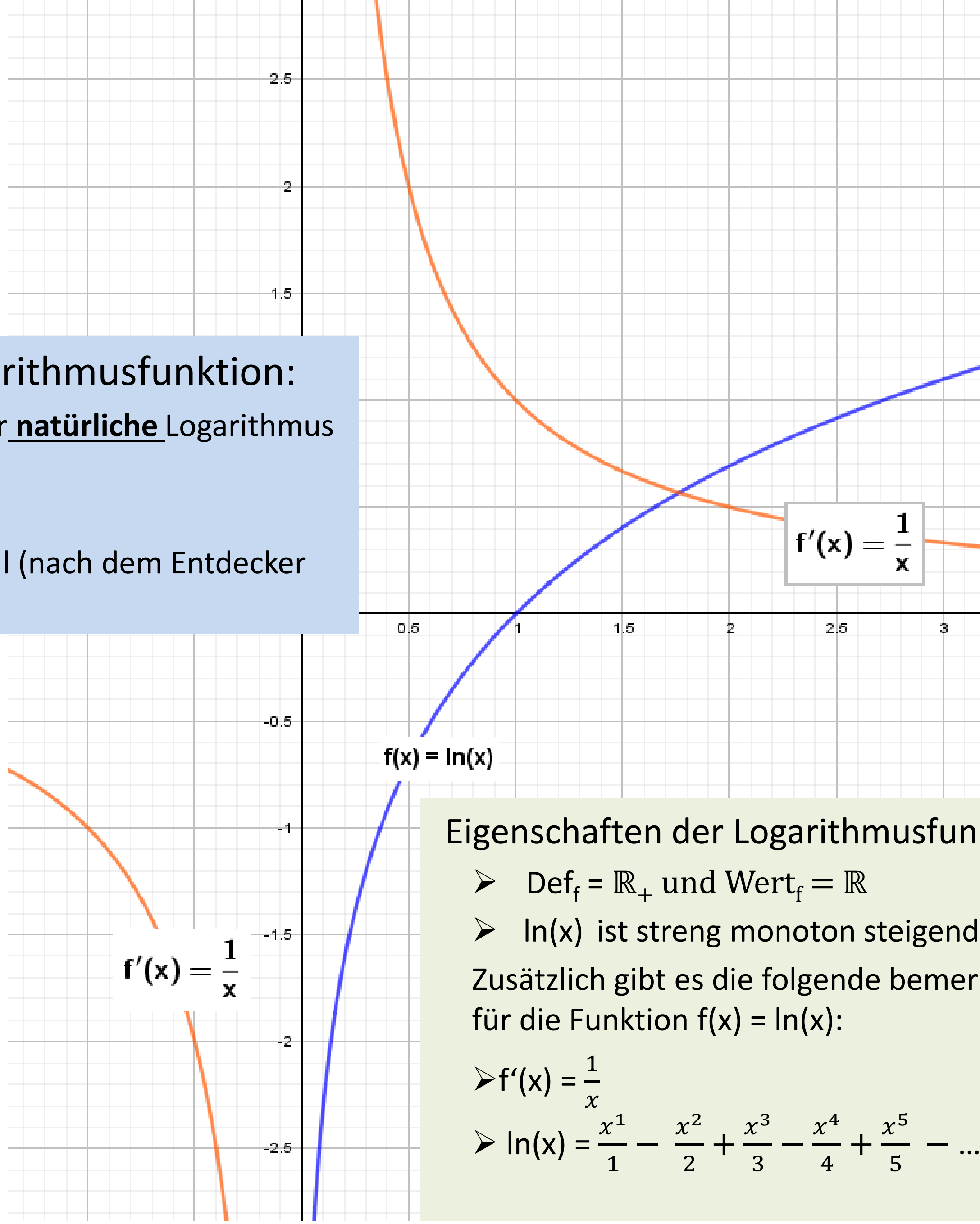
Parameter in der Logarithmusfunktion :

Durch den Einbau von Parametern kann man den Graphen modellieren:

$f(x) = a \cdot \log_b(a) + y_v$ mit $b > 0$ und $b \neq 1$

Probiere die Wirkung der Parameter a, b, c, d und y_v mit Geogebra aus





Definition der Logarithmusfunktion:

$f(x) = \log_e(x)$ heißt der **natürliche** Logarithmus mit e = 2,71828 …

Schreibweise: ln(x)

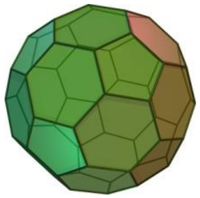
e heißt Eulersche Zahl (nach dem Entdecker dieser Zahl)

Eigenschaften der Logarithmusfunktion f(x) = ln(x):

- $Def_f = \mathbb{R}_+$ und $Wert_f = \mathbb{R}$
- ln(x) ist streng monoton steigend

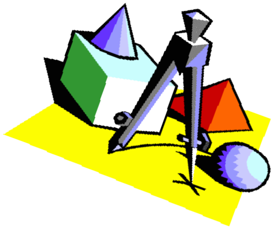
Zusätzlich gibt es die folgende bemerkenswerte Eigenschaft für die Funktion f(x) = ln(x):

- $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(x) = \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \cdot \frac{x^n}{n}$



Exponential – und Logarithmusfunktion

Mathematik Klasse 12



Ordne die Schnipsel den Beschreibungen zu

$a^{\frac{b}{n}} = \sqrt[n]{a^b}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Potenz mit dem Exponent 0

Potenz mit dem Exponent 1
Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem ihre Exponenten addiert werden.

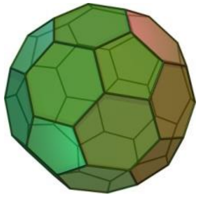
Potenzierung von Potenzen: Potenzen werden potenziert, indem alle Exponenten miteinander multipliziert werden.

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponent: Potenzen mit gleichem Exponent werden multipliziert, indem die Basen multipliziert werden.

Potenz mit negativem Exponenten

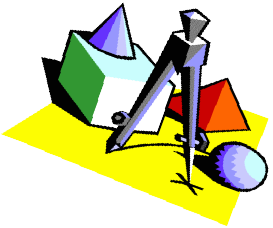
Division von Potenzen mit gleicher Basis

Potenz deren Exponent ein Bruch ist. (Achtung: wenn n gerade ist, muss gelten:a > 0 oder b gerade, sonst wird der Radikant negativ)



Exponential – und Logarithmusfunktion

Mathematik Klasse 12



Ordne die Schnipsel den Beschreibungen zu

$$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log x + \log y = \log xy$$

$$n \log x = \log x^n$$

$$\frac{\log x}{\log a} = \log_a x$$

$$-\log x = \log \frac{1}{x}$$

$$\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$$

Definition des Logarithmus

Nullstelle aller Logarithmen

Addition von Logarithmen

Negation von Logarithmen

Subtraktion von Logarithmen

Multiplikation eines Logarithmus mit einer natürlichen Zahl

Division von Logarithmen