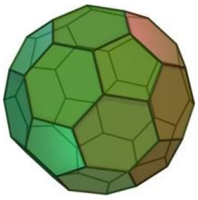
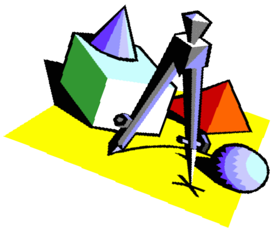


Aufgabenblatt 5 / Klasse 12
Flächen unter Kurven



Aufgabe 1 (Flächenberechnung)

Berechne den Flächeninhalt, der von der x-Achse und den Funktionen f(x) und p(x) eingeschlossen wird mit

$f(x) = \frac{1}{3}(x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2)$

$p(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1{,}5$

Aufgabe 2 (Flächenberechnung)

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = -\frac{3}{32}x^3 + x$, mit $D_f = \mathbb{R}$.

a) Die Funktion $f_1(x)$ schließt im 1.Quadranten mit der x- Achse eine Fläche ein. Skizziere die Funktion und berechne die Fläche.
b) Die Gerade parallel zur y- Achse, die durch den Punkt (3|0) geht, zerlegt die Fläche in 2 Teile. Berechne das Verhältnis der beiden Flächeninhalte.

Aufgabe 3 (Flächenberechnung)

Folgende 3 Funktionen sind gegeben, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind:

$f(x) = x^2 - 2x + 4$

$g(x) = -x^2 + 2x + 4$

$h(x) = -x + 6$

a) Ermittle die Scheitelpunkte Parabeln und ihre Schnittpunkte
b) Zeichne die drei Graphen der Funktionen im 1. Quadranten und straffiere die Fläche, die sie einschließen.
c) Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Fläche.

Aufgabenblatt 5 / Klasse 12
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Flächenberechnung)

Schnittpunkte:

$f(x) = p(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1{,}5 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3}(x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2) + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow$

$x^4 - x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{29}{4}x - \frac{13}{2} = 0$

Eine Nullstelle raten: $x_0 = 1$ ist Nullstelle,
dann Polynomdivision $(x^4 - x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{29}{4}x - \frac{13}{2}) : (x - 1)$ liefert 2. Nullstelle $x_1 = -2$

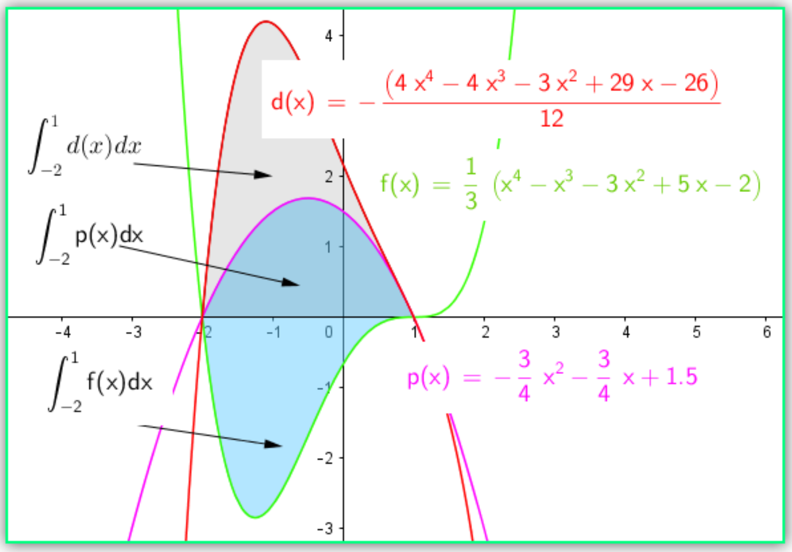
1. Möglichkeit (Differenzfunktion):

$d(x) = p(x) - f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{29}{12}x + \frac{13}{6}$

$D(x) = \int d(x)\,dx = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{29}{24}x^2 + \frac{13}{6}x + c$

Fläche = $D(1) - D(-2) =$
$-\frac{1}{15}\cdot 1^5 + \frac{1}{12}\cdot 1^4 + \frac{1}{12}\cdot 1^3 - \frac{29}{24}\cdot 1^2 + \frac{13}{6}\cdot 1 - (-\frac{1}{15}\cdot(-2)^5 + \frac{1}{12}\cdot(-2)^4 + \frac{1}{12}\cdot(-2)^3 - \frac{29}{24}\cdot(-2)^2 + \frac{13}{6}\cdot(-2)) = 7{,}425$

2. Möglichkeit (Einzelintegration):



$f(x) = -\frac{1}{3}(x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2)$

$F(x) = -\frac{1}{3}(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x)$

$p(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1{,}5$

$P(x) = -\frac{3}{4\cdot 3}x^3 - \frac{3}{4\cdot 2}x^2 + 1{,}5x$

$F(1) - F(-2) =$

$-\frac{1}{3}(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{3}{3} + \frac{5}{2} - 2) -$
$[-\frac{1}{3}(\frac{1}{5}\cdot(-2)^5 - \frac{1}{4}\cdot(-2)^4 - \frac{3}{3}\cdot(-2)^3 + \frac{5}{2}\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2))]$

$= 0{,}18 + 3{,}87 = 4{,}05$

$P(1) - P(-2) =$
$-\frac{3}{4\cdot 3}\cdot 1^3 - \frac{3}{4\cdot 2}\cdot 1^2 + 1{,}5\cdot 1 - (-\frac{3}{4\cdot 3}\cdot(-2)^3 - \frac{3}{4\cdot 2}\cdot(-2)^2 + 1{,}5\cdot(-2)) = -\frac{5}{2} - \frac{7}{8} = 3{,}375$

Die umschlossene Fläche hat einen Inhalt von etwa 7,425 FE.

Aufgabenblatt 5 / Klasse 12

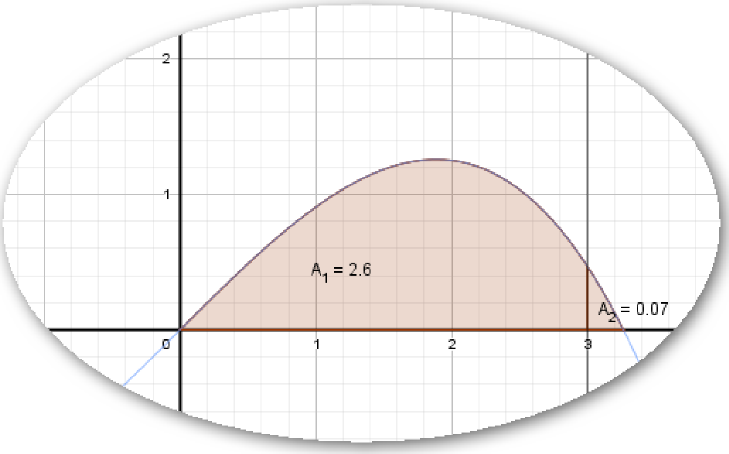
Aufgabe 2 (Flächenberechnung)

a) Fläche A = 2,67

b) Fläche $A_1 \approx 2{,}6$ und

Fläche $A_2 \approx 0{,}07$

$A_1 / A_2 = 30$



Aufgabe 3 Flächenberechnung

x- Koordinate des Scheitelpunktes von f(x)(Formel $\frac{-b}{2a)}$) : 1

x- Koordinate des Scheitelpunktes von g(x)(Formel $\frac{-b}{2a)}$) : 1

x- Koordinaten der Schnittpunkte der Parabeln: f(x) = g(x) $\Rightarrow$

$x^2 - 2x + 4 = -x^2 + 2x + 4 \quad \Leftrightarrow$

$2x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x(x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ sind x Koordinaten der Schnittpunkte.

x- Koordinaten der Schnittpunkte von h(x) und g(x) : h(x) = g(x) $\Rightarrow$

$-x + 6 = -x^2 + 2x + 4 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

Fläche:

$$A_1 = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,dx$$

$$A_1 = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \left(-\tfrac{16}{3} + 8\right)$$

$$A_1 = \frac{8}{3} FE$$

$$A_2 = \int_1^2 [g(x) - h(x)]\,dx$$

$$= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\,dx$$

$$A_2 = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2$$

$$= \left(-\tfrac{8}{3} + 6 - 4\right) - \left(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} - 2\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{6} FE$$

$$A_{ges} = \frac{8}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{2} = \underline{\underline{2{,}5\ FE}}$$