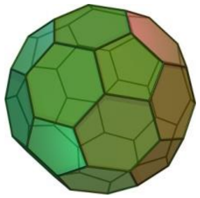
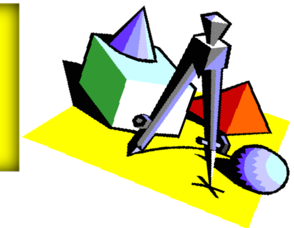


Monotonie und Krümmungen

Mathematik Klasse 12



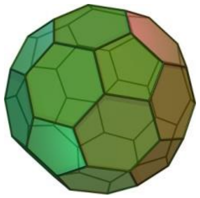
Oft verhalten sich Funktionen auf ganzen Intervallen gleich hinsichtlich ihres Steigungs- oder Krümmungsverhalten. Hier wird ihr Steigungsverhalten betrachtet:

Def.: Monotonie im Intervall (a, b)
Eine Funktion f heißt streng **monoton zunehmend** (bzw **abnehmend**) in (a, b), wenn gilt:
$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (bzw: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ für alle x_1 , $x_2 \in (a,b)$

Es gibt Regeln, um leichter zu erkennen, ob eine Funktion streng monoton verläuft, allerdings sind diese Regeln nur sinnvoll auf Intervallen, in denen die Funktionen definiert und stetig sind.

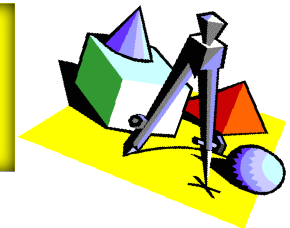
Regel: Monotoniekriterien
Wenn die Funktion in einem abgeschlossenen Intervall [a; b] stetig und im offenen Intervall (a; b) differenzierbar ist, dann gilt:

- $f'(x) > 0$ in (a; b) $\Rightarrow$ f ist streng monoton steigend in [a; b]
- $f'(x) < 0$ in (a; b) $\Rightarrow$ f ist streng monoton fallend in [a; b]
- $f'(x) = 0$ in (a; b) $\Rightarrow$ f ist konstant

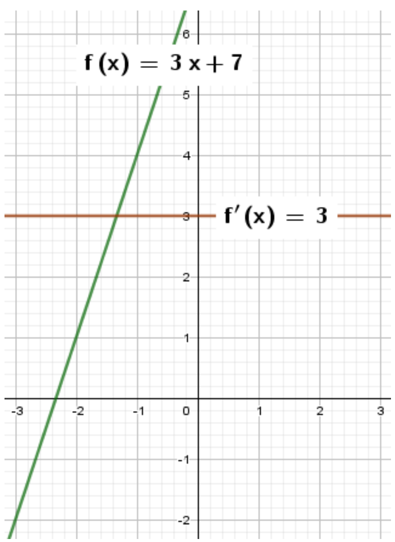


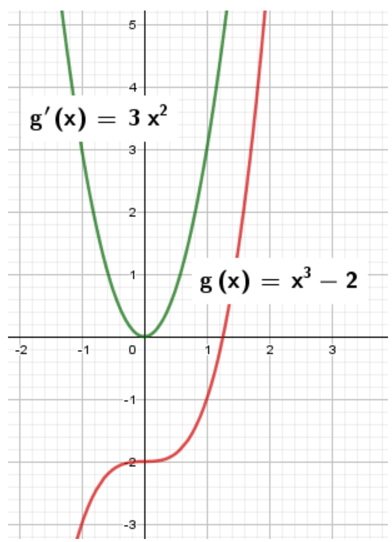
Monotonie und Krümmungen

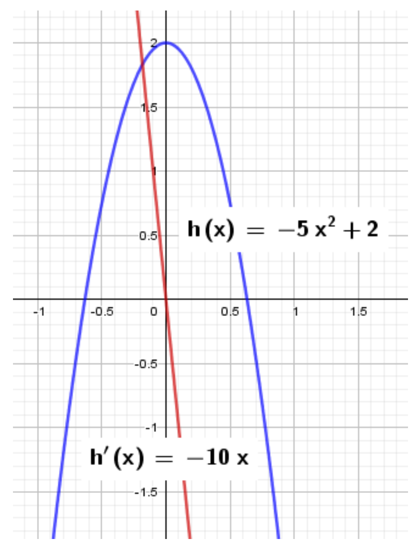
Mathematik Klasse 12

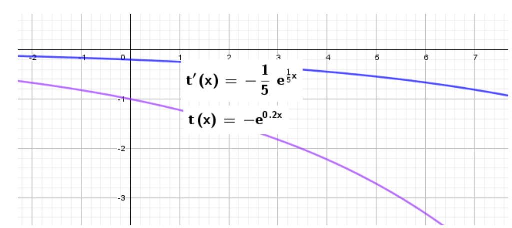


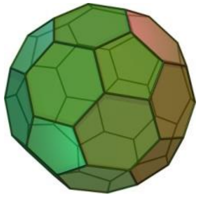
Beispiel :	$f(x) = 3x + 7$, monoton steigend auf $\mathbb{R}$
	$g(x) = x^3 – 2$, monoton steigend auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
	$h(x) = -5x^2 + 2$, monoton steigend auf $(-\infty, 0)$, monoton fallend auf $(0, \infty)$
	$t(x) = -e^{0,2x}$ (monoton fallend auf $\mathbb{R}$ (nur für Spezialisten)





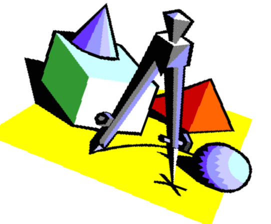






Monotonie und Krümmungen

Mathematik Klasse 12



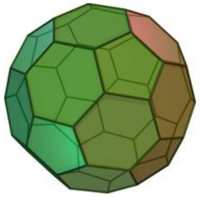
Oft verhalten sich Funktionen auf ganzen Intervallen gleich hinsichtlich ihres Steigungs- oder Krümmungsverhalten. Hier wird ihr Krümmungsverhalten betrachtet:

Def.: Krümmung
Eine im Intervall (a, b) stetige und differenzierbare Funktion f heißt links (rechts) gekrümmt in (a, b), wenn $f'(x)$ in (a, b) streng monoton steigt (fällt).

Es gibt Regeln, um leichter zu erkennen, ob eine Funktion in einem Intervall links oder rechts gekrümmt ist, allerdings sind diese Regeln nur sinnvoll auf Intervallen, in denen die Funktion definiert und zwei Mal differenzierbar ist.

Regel: Krümmungskriterien
Wenn die Funktion in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetig und im offenen Intervall (a; b) zwei Mal differenzierbar ist, dann gilt:

- $f''(x) > 0$ in (a; b) $\Rightarrow$ f ist links gekrümmt in (a, b)
- $f''(x) < 0$ in (a; b) $\Rightarrow$ f ist rechts gekrümmt in (a, b)



Monotonie und Krümmungen

Mathematik Klasse 12

Beispiel :	$f(x) = 3x + 7,\ f'(x) = 3,\ f''(x) = 0$	$\Rightarrow$ keine Krümmung auf $\mathbb{R}$
	$g(x) = x^3 - 2,\ g'(x) = 3x^2,\ g''(x) = 6x$	$\Rightarrow$ rechts gekrümmt in $(-\infty, 0)$, $\Rightarrow$ links gekrümmt in $(0, \infty)$
	$h(x) = -0{,}5x^2 + 2,\ h'(x) = -x,\ h''(x) = -1$	$\Rightarrow$ rechtsgekrümmt auf $\mathbb{R}$
	$s(x) = \frac{8}{3}x^5 + 2x^2 + 2,\ t'(x) = 8x^4 + 4x,\ \ t''(x) = 32x^3 + 4$	$\Rightarrow$ rechts gekrümmt in $(-\infty,\ -\frac{1}{2})$, $\Rightarrow$ links gekrümmt in $(-\frac{1}{2}, \infty)$