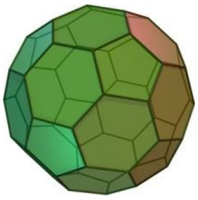
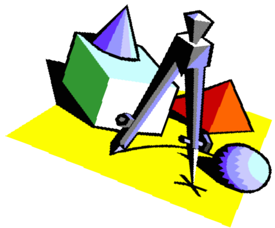


Aufgabenblatt 1 / Klasse 12

Kurvendiskussion



Aufgabe 1 Nullstellen

Gegeben ist die reelle Funktion $f: \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}$ $D_f = \mathbb{R}$.

a) Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. Ermittele alle Nullstellen der Funktion f mit ihren Vielfachheiten. Gib die Linearfaktorzerlegung des Funktionsterms f(x) an.
b) Durch die Punkte $P(-2; y_P) \in G_f$ und $Q(-1; y_Q) \in G_f$ ist eine Gerade g festgelegt. Ermittele eine Gleichung der Geraden g und die Koordinaten des weiteren Schnittpunktes R der Geraden g und des Graphen G_f.

Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden Funktionsterme für $x \in \mathbb{R}$:

- $f_1(x) = x^4 - 16$
- $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$
- $f_3(x) = 7$
- $f_4(x) = (x-1)(x^2 + x + 7)$

a) Berechne jeweils die Ableitungen
b) Berechne die Gleichungen der Tangenten an den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen

Aufgabe 3

a) Untersuche die Funktion $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5$ mit $x \in \mathbb{R}$ auf Symmetrie.
b) Wo hat f(x) eine waagerechte Tangente!
c) Wie verhält sich f(x) für $x \mapsto \pm\infty$
d) Bestimme die Monotonieintervalle!
e) Bestimme die Krümmungsintervalle!
f) Gibt es lokale Extrema und wo liegen sie gegebenenfalls?
g) Gibt es Wendepunkte und wo liegen sie gegebenenfalls?
h) Wie heißt die Gleichung der Tangente an f(x) im Punkt (1,f(1))?

Aufgabenblatt 1 / Klasse 12

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 Nullstellen

1.Nullstelle erraten: $x_0 = -1$

Polynomdivision:

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}\right) : (x+1) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2$$

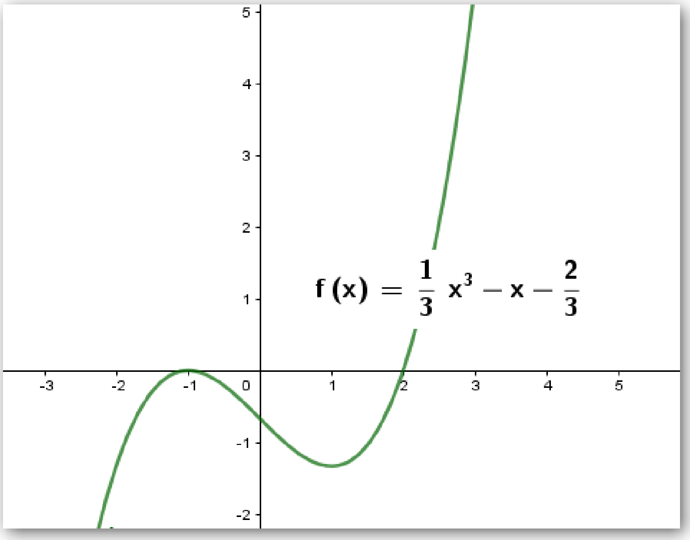
$$-\frac{1}{3}x^2 - x - \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x$$

$$-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$0$$



$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ mit Mitternachtsformel: $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$

Bei $x = -1$ liegt eine doppelte Nullstelle, bei $x = 2$ eine einfache vor.

Aufgabe 2

a) zu $f_1(x) = x^4 - 16$:

$f_1'(x) = 4x^3$

b) **Schnittpunkt mit x-Achse** bedeuted: für welches x gilt: $f1(x) = 0$?

$x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2$, also Schnittpunkt mit x-Achse ist $P_1(-2,0)$ und $P_2(2,0)$

Schnittpunkt mit y-Achse ist $P_3(0,f_1(0)) = P_3(0,-16)$

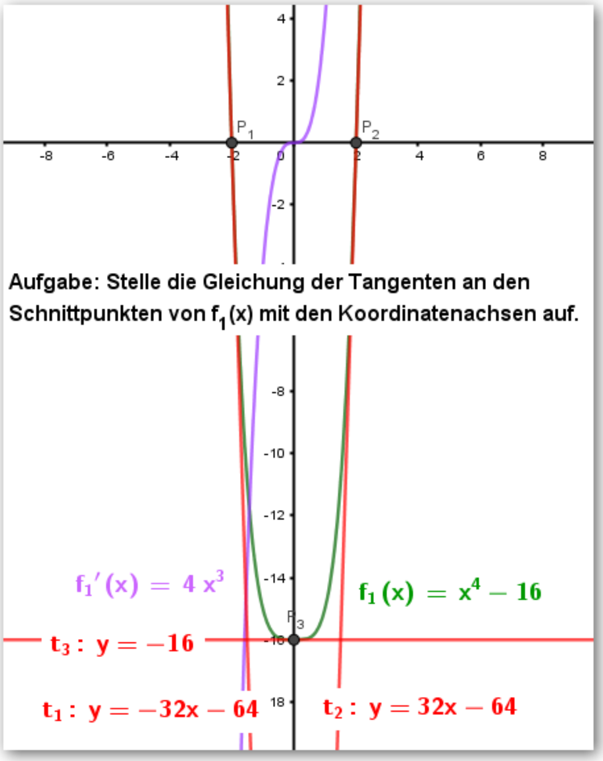
Tangente an P_1 ist eine Gerade $t_1(x) = mx + t$, t_1 hat bei $x_1 = -2$ die gleiche Steigung wie $f_1(x)$, also gilt:

$t_1(x) = f_1'(-2)x + t = -32x + t$

Andererseits haben $f_1(x)$ und $t_1(x)$ den Punkt P_1 gemeinsam, also muß gelten: $t_1(-2) = f_1(-2)$,also:

$t_1(-2) = -32 \cdot (-2) + t = 0 \Rightarrow t = -64 \Rightarrow t_1(x) = -32x - 64$

analog für $x_2 = 2$ und $x_3 = 0$



Aufgabenblatt 1 / Klasse 12

Aufgabe 3

a) Symmetrie
   Da alle auftretenden Exponenten von x gerade sind, liegt Achsensymmetrie vor.

b) waagerechte Tangenten
   waagerechte Tangente bei x_0 bedeuted: $f'(x_0) = 0$, also
   $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x = 0$
   Nullstelle von f' berechnen, $-\frac{1}{3}x$ ausklammern:
   $f'(x) = -\frac{1}{3}x(x^2 - 9) \Rightarrow x_0 = 0, x_1 = -3$ und $x_2 = 3$ sind Nullstellen von f', damit liegen hier waagerechten Tangenten vor.

c) globales Verhalten
   für $x \mapsto \pm\infty$ geht $f(x) \mapsto -\infty$, da der Term mit dem höchsten Exponent das Verhalten bestimmt.

d) Monotonie
   $f'(x) > 0$ in $[a, b] \Rightarrow$ f monoton steigend in [a, b]
   $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x > 0 \quad \Leftrightarrow$
   $x(x^2 - 9) < 0 \quad \Leftrightarrow$
   $\left(x < 0 \text{ und } (x^2 - 9 > 0)\right)$ oder $\left(x > 0 \text{ und } (x^2 - 9 < 0)\right) \quad \Leftrightarrow$
   $x < 0$ und ($x > 3$ oder $x < -3$) oder $x > 0$ und (($x > 0$ und $x < 3$) oder ($x < 0$ und $x > -3$)) $\Leftrightarrow$
   $x < -3$ oder ($x > 0$ und $x < 3$)
   f(x) ist monoton steigend in $(-\infty; -3] \cup [0; 3]$

   $f'(x) < 0$ in $[a, b] \Rightarrow$ f monoton fallend in [a, b] analog
   oder über Extrema und Tabelle

e) Krümmungsintervalle
   $f''(x) > 0$ in $[a, b] \Rightarrow f(x)$ links gekrümmt in [a, b]
   $f''(x) = -x^2 + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow$
   $x^2 < 3 \quad \Leftrightarrow$
   $x > 0$ und $x < \sqrt{3}$ oder $x < 0$ und $x > -\sqrt{3}$
   f(x) ist links gekrümmt in $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

   $f''(x) < 0$ in $[a, b] \Rightarrow$ rechts gekrümmt in [a, b] analog

f) Extrema
   $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
   $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow$
   $x(x^2 - 9) < 0 \quad \Leftrightarrow$
   $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$ sind Kandidaten für Extrema
   $f''(0) = 3 > 0 \Rightarrow$ bei $x_0 = 0$ liegt lokales Minimum vor
   $f''(3) = -6 < 0 \Rightarrow$ bei $x_1 = 3$ liegt lokales Maximum vor
   $f''(-3) = -6 < 0 \Rightarrow$ bei $x_2 = -3$ liegt lokales Maximum vor

g) Wendepunkte
   $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt
   $f''(x) = -x^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$
   $f'''(x) = -2x$ damit $f'''(\pm\sqrt{3}) \neq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ sind x-Koordinaten der Wendepunkte